ЧАСТИЧНЫЕ ПОРЯДКИ НА $*$-РЕГУЛЯРНЫХ КОЛЬЦАХ

НУРЖАНОВ Б. О.

КАРАКАЛПАКСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ
ИМ. В. И. РОМАНОВСКОГО

27.10.2023

Содержание

1 Введение

2 $*$-Регулярные кольца

3 Частичные порядки на $*$-регулярных кольцах

1 Введение

2 $*$-Регулярные кольца

3 Частичные порядки на $*$-регулярных кольцах

Введение

- Набор утверждений квантовой механики имеет алгебраические свойства, отличные от булевой алгебры, а именно структуру ортомодулярной решетки[1].
- Тематика регулярных колец фон Неймана является частью некоммутативной теории колец, которая была первоначально введена фон Нейманом для прояснения некоторых аспектов операторных алгебр[2][3].

---

[1] **G. Birkhoff, J. von Neumann**, *The logic of quantum mechanics* // The Annals of Mathematics, 37, 1936, pp. 823–843.

[2] **J. von Neumann**, *Continuous rings and their arithmetics* // Proceedings of the National Academy of Sciences, USA. 23, 1937, pp. 341–349.

[3] **J. von Neumann**, *Continuous geometry*, Princeton, 1960.

Введение

- Современное состояние ортомодулярных решеток даны в работах[4][5].
- Изучена топология, порожденная звездным порядком на алгебрах фон Неймана, и доказана, что порядковая топология тоньше, чем σ-сильная $*$ топология. Также показано, что порядковая топология совпадает с топологией сходимости по норме тогда и только тогда, когда алгебра фон Неймана конечномерна[6].

---

[4] **A. Dvurecenskij, S. Pulmannova**, *New trends in quantum structures*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2000.

[5] **P. Ptăk, S. Pulmannova**, *Orthomodular structures as quantum logics*. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1991.

[6] **M. Bohata**, *Star order and topologies on von Neumann algebras* // Mediterranean Journal of Mathematics, 15, 2018. pp. 174–188.

Введение

- Доказано, что супремум и инфимум подмножества в алгебре фон Неймана относительно звездного частичного порядка такие же, как в $B(H)$[7].
- Исследована порядковая топология на эрмитовой части алгебры фон Неймана и дана характеризация многих важных свойств алгебр фон Неймана, таких как конечность, сигма-конечность, конечность и атомичность, с точки зрения того, как порядковая топология сравнивается с другими известными топологиями на алгебрах фон Неймана[8].

[7] **X. P. Zhang, W. J. Shi, G. X. Ji**, *Star partial order in a von Neumann algebra* // Acta Math. Sinica (Chin. Ser.) 60, 2017. pp. 19–30.

[8] **E. Chetcuti, J. Hamhalter, H. Weber**, *The order topology for a von Neumann algebra* // Studia Math. 230, 2015. pp. 95–120.

1 Введение

2 $*$-Регулярные кольца

3 Частичные порядки на $*$-регулярных кольцах

Регулярные и $*$-регулярные кольца

Кольцо $\mathcal{A}$ называется $*$-кольцом (или кольцом с инволюцией), если существует операция $* : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ такая, что для всех $a, b \in \mathcal{A}$ выполняются следующие равенства

- $(a^*)^* = a$,
- $(a+b)^* = a^* + b^*$,
- $(ab)^* = b^* a^*$.

Напомним, что элемент e $*$-кольца $\mathcal{A}$ называется проектором, если $e^2 = e = e^*$.

Кольцо $\mathcal{A}$ называется регулярным, если для каждого $x \in \mathcal{A}$ существует элемент $y \in \mathcal{A}$ такой, что $xyx = x$.

Инволюция $*$ в $\mathcal{A}$ называется собственной, если из $x^* x = 0$ следует, что $x = 0$ для любого $x \in \mathcal{A}$.

$*$-кольцо $\mathcal{A}$ называется $*$-регулярным, если оно является регулярным кольцом с собственной инволюцией.

Левые и правые проекторы

Пусть $\mathcal{A}$ – $*$-регулярное кольцо. Тогда существует единственный проектор $r(x)$ такой, что

- $xr(x) = x$;
- $xy = 0$ тогда и только тогда, когда $r(x)y = 0$.

Аналогично существует единственный проектор $l(x)$ такой, что

- $l(x)x = x$;
- $yx = 0$ тогда и только тогда, когда $yl(x) = 0$.

Проекторы $r(x)$ и $l(x)$ называются соответственно правым и левым проектором элемента x.
Проектор

$$s(x) = l(x) \vee r(x)$$

является носителем элемента x.

Ранк-метрика

Пусть $\mathcal{A}$ – $*$-регулярное кольцо и $P(\mathcal{A})$ – решетка всех проекторов из $\mathcal{A}$, т. е. $P(\mathcal{A}) = \left\{p \in \mathcal{A} : p^2 = p = p^*\right\}$.
Действительнозначная функция μ на $P(\mathcal{A})$ называется нормальной точной нормированной мерой, если

- $0 \leq \mu(p) \leq 1$;
- $\mu(0) = 0$, $\mu(\mathbf{1}) = 1$;
- $\mu(p \vee q) + \mu(p \wedge q) = \mu(p) + \mu(q)$;
- $p \leq q \Rightarrow \mu(p) \leq \mu(q)$;
- $p_i \uparrow p \Rightarrow \mu(p_i) \uparrow \mu(p)$.

Рассмотрим так называемую ранк-метрику ρ на $\mathcal{A}$, определяемую следующим образом[9]

$$\rho(x, y) = \mu(l(x - y)), \ x, y \in \mathcal{A}. \tag{1}$$

[9] **J. von Neumann**, *Continuous geometry*, Princeton, 1960.

Алгебры Мюррея-фон Неймана

Пусть H – гильбертово пространство, $B(H)$ – $*$-алгебра всех ограниченных линейных операторов в H и $\mathcal{M}$ – конечная алгебра фон Неймана в $B(H)$.

Замкнутый линейный оператор $x : \mathrm{dom}(x) \to H$ с плотной областью определения называется присоединенным к $\mathcal{M}$, если $yx \subset xy$ для каждого y из коммутанта $\mathcal{M}'$ алгебры $\mathcal{M}$.

Обозначим через $S(\mathcal{M})$ множество всех операторов, присоединенных к $\mathcal{M}$. Хорошо известно[10], что множество $S(\mathcal{M})$ является унитальной $*$-регулярной алгеброй над C.

Алгебра $S(\mathcal{M})$ называется алгеброй Мюррея-фон Неймана[11], ассоциированной с $\mathcal{M}$.

---

[10] **I. E. Segal**, *A non-commutative extension of abstract integration* // Annals of Mathematics, 57. 1953. pp. 401–457.

[11] **R. Kadison, Z. Liu**, *A note on derivations of Murray – von Neumann algebras* // PNAS, 111. 2014. pp. 2087–2093.

Алгебра $S(\mathcal{M})$

Примеры.

- Если $\mathcal{M} = L_\infty(0,1)$, тогда $S(\mathcal{M}) \cong S(0,1)$;
- Если $\mathcal{M} = B(H)$, тогда $S(\mathcal{M}) \cong B(H)$.

Пусть τ – точный нормальный конечный след на $\mathcal{M}$ и ρ – ранк-метрика на $S(\mathcal{M})$, определенная как в (1).
Согласно[12], алгебра $S(\mathcal{M})$ с метрикой ρ является полным топологическим $*$-кольцом.

[12] **L. Ciach**, *Linear-topological spaces of operators affiliated with von Neumann algebra // Bulletin of the Polish Academy of Sciences, 31, 1983, pp. 161–166.*

Кольцевые изоморфизмы

Кольцевые изоморфизмы алгебры $S(\mathcal{M})$ и их $*$-подалгебр были рассмотрены в работах[13][14]. В частности, было получено полное описание кольцевых изоморфизмов между алгебрами измеримых операторов, присоединенных к алгебрам фон Неймана типа II_1.

[13] **Sh. A. Ayupov, K. K. Kudaybergenov**, *Ring isomorphisms of Murray – von Neumann algebras* // Journal of Functional Analysis. 280, 2021. 108891.

[14] **Sh. A. Ayupov, K. K. Kudaybergenov**, *Ring isomorphisms of $*$-subalgebras of Murray-von Neumann factors* // Lobachevskii Journal of Mathematics. 42, 2021. pp. 2730–2739.

1 Введение

2 $*$-Регулярные кольца

3 Частичные порядки на $*$-регулярных кольцах

Частичные порядки

Пусть $\mathcal{A}$ – $*$-регулярное кольцо с ранк-метрикой ρ. Предположим, что $(\mathcal{A}, \rho)$ – полное метрическое $*$-кольцо.
Пусть $a, b \in \mathcal{A}$. Мы говорим, что a алгебраически ортогонален b, если $ab = ba = a^*b = ab^* = 0$ (обозначается $a \perp b$).
В частности, если $a, b \in \mathcal{A}_h = \{x \in \mathcal{A} : x = x^*\}$, то

$$a \perp b \quad \Leftrightarrow \quad ab = 0.$$

Отметим, что для любых $a, b \in \mathcal{A}$

$$a \perp b \quad \Leftrightarrow \quad s(a)s(b) = 0.$$

Для элементов $a, b \in \mathcal{A}$ положим

$$a \prec_s b, \quad \text{если} \quad b = a + c,\ a \perp c;$$

$$a \prec_l b, \quad \text{если} \quad l(a)b = a;$$

$$a \prec_r b, \quad \text{если} \quad br(a) = a.$$

Частичные порядки

Лемма.

Отношение $\prec$, где $\prec \in \{\prec_s, \prec_l, \prec_r\}$, является частичным порядком на $\mathcal{A}$, т.е.

- $x \prec x$;
- $x \prec y,\ y \prec x \Rightarrow x = y$;
- $x \prec y,\ y \prec z \Rightarrow x \prec z$.

Порядковая сходимость

Пусть X - топологическое пространство, $\{x_n\} \subset X$ - последовательность и $x \in X$.
Говорят, что $\{x_n\}$ сходится к x, если для произвольной открытой окрестности U точки x найдется $n_U \in N$ такой, что $x_n \in U$ для всех $n \geq n_U$.
Рассмотрим числовую ось R с естественной топологией и рассмотрим $\{x_n\} \subset R$, $x \in R$. Тогда

$$x_n \to x \quad \Leftrightarrow \quad \inf_{k\geq 1} \sup_{n\geq k} x_n = \sup_{k\geq 1} \inf_{n\geq k} x_n = x.$$

Заметим, что правая часть зависит только от порядковой структурой числовой оси R. Иначе говоря, понятие сходимости числовой оси R можно определить без использования понятия топологии. Этот факт привел Бирхгофа к исследованию порядковой сходимости.

Порядковая сходимость

Пусть $\mathcal{A}$ – $*$-регулярное кольцо.

Понятие порядковой сходимости сети было введено Г. Биркгофом и фон Нейманом[15].

Пусть $\prec \in \{\prec_s, \prec_l, \prec_r\}$.

Для сети $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A} \subset \mathcal{A}$ понятие $x_\alpha \uparrow x$ (соответственно $x_\alpha \downarrow x$), где $x \in \mathcal{A}$, означает, что $x_\alpha \prec x_\beta$ (соответственно $x_\beta \prec x_\alpha$) для $\alpha \leq \beta$ и $x = \sup\limits_{\alpha\in A} x_\alpha$ (соответственно, $x = \inf\limits_{\alpha\in A} x_\alpha$).

Сеть $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A} \subset \mathcal{A}$ называется (o)-сходящейся к элементу x в $\mathcal{A}$ (обозначается $x_\alpha \stackrel{(o)}{\to} x$), если существуют сети $\{y_\alpha\}_{\alpha\in A}$ и $\{z_\alpha\}_{\alpha\in A}$ из $\mathcal{A}$ такие, что $y_\alpha \prec x_\alpha \prec z_\alpha$ для каждого $\alpha \in A$ и $y_\alpha \uparrow x$, $z_\alpha \downarrow x$.

[15] **G. Birkhoff, J. von Neumann**, *The logic of quantum mechanics* // Ann. of Math. 37, 1936, pp. 823–843.

Порядковая топология

Определение.

Сильнейшая топология на $\mathcal{A}$, для которой (o)-сходимость сетей влечет их сходимость в топологии называется порядковой топологией или (o)-топологией, и обозначается $t_o(\prec)$.

Пусть t_ρ – топология на $\mathcal{A}$, порожденная ранк-метрикой ρ.

Теорема[16].

Пусть $\mathcal{A}$ – $*$-регулярное кольцо с ранк-метрикой ρ такое, что $(\mathcal{A}, \rho)$ является полным метрическим $*$-кольцом. Тогда порядковая топология $t_o(\prec)$ сильнее, чем t_ρ.

[16] **K. K. Kudaybergenov, B. O. Nurjanov**, *Partial orders on *-regular rings* // Ufa Mathematical Journal. 15(1), 2023. p. 34-42.

Порядковая топология

Замечание.

Если $\mathcal{A}$ – конечномерная $*$-регулярная алгебра с ранк-метрикой ρ, то обе топологии t_o и t_ρ являются дискретными.

Действительно, поскольку $\mathcal{A}$ – конечномерна, то множество всех значений функции ρ конечно. Следовательно, топология t_ρ является дискретной. Кроме того, поскольку t_o должно быть сильнее, чем t_ρ, то отсюда следует, что порядковая топология также дискретна.

Сужение порядка на решетке проекторов и множестве частичных изометрий

Пусть $\mathcal{A}_h$ – подмножество всех эрмитовых элементов из $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}_+$ – конус всех положительных элементов из $\mathcal{A}_h$, т.е.

$$\mathcal{A}_+ = \left\{x \in \mathcal{A}_h : x = y^2,\ y \in \mathcal{A}_h\right\}.$$

Пусть $\leq$ – обычный порядок на $\mathcal{A}_h$, поэтому для $x, y \in \mathcal{A}_h$ неравенство $x \leq y$ означает, что $y - x \in \mathcal{A}_+$.
Частичные порядки $\prec_s, \prec_l$ и $\prec_r$ на множестве $P(\mathcal{A})$ всех проекторов из $\mathcal{A}$ совпадают с обычным порядком $\leq$.
Обозначим через $\mathcal{GU}(\mathcal{A})$ множество всех частичных изометрий в $\mathcal{A}$, т.е.

$$\mathcal{GU}(\mathcal{A}) = \{w \in \mathcal{A} : w = ww^*w\}.$$

Отметим, что $l(w) = ww^*$ и $r(w) = w^*w$ являются левым и правым носителями для $w \in \mathcal{GU}(\mathcal{A})$.

На множестве $\mathcal{GU}(\mathcal{A})$ можно определить частичный порядок следующим образом:

$$u \leq_l v \quad \Leftrightarrow \quad uu^* \leq vv^*,\ u = uu^*v.$$

Ясно, что

$$u \leq_r v \quad \Leftrightarrow \quad u^*u \leq v^*v,\ u = vu^*u$$

также определяет частичный порядок на множестве $\mathcal{GU}(\mathcal{A})$ и

$$u \leq_l v \quad \Leftrightarrow \quad u^* \leq_r v^*.$$

Это означает, что сужения частичных порядков $\prec_l$ и $\prec_r$ на $\mathcal{GU}(\mathcal{A})$ совпадают с частичными порядками $\leq_l$ и $\leq_r$, соответственно.

Кольцевые изоморфизмы – отображения, сохраняющие порядок

Для $*$-колец $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ биекция (не обязательно линейная) $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ называется кольцевым изоморфизмом, если для всех $a, b \in \mathcal{A}$

- $\Phi(a+b) = \Phi(a) + \Phi(b)$;
- $\Phi(ab) = \Phi(a)\Phi(b)$.

Теперь рассмотрим кольцевые изоморфизмы, сохраняющие частичные порядки $\prec_l$ и $\prec_r$.

Предложение.

Пусть $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ – $*$-регулярные кольца и $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ – кольцевой изоморфизм. Тогда

- $x \prec_l y \quad \Leftrightarrow \quad \Phi(x) \prec_l \Phi(y)$.
- $x \prec_r y \quad \Leftrightarrow \quad \Phi(x) \prec_r \Phi(y)$.

БОЛЬШОЕ СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!